Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek
Megoldások

1)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$x^2 = |x-6|$ **(5 pont)**

b) Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} \lg(x+y) &= 2\lg x \\ \lg x &= \lg 2 + \lg(y-1) \end{aligned}\right\}$$ **(9 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 3. feladat*

b) $x>0$ és $y>1$ a logaritmus értelmezése miatt (1 pont)

A logaritmus azonosságait használva

$$\left.\begin{aligned} \lg(x+y) &= \lg x^2 \\ \lg x &= \lg 2(y-1) \end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

Az lg függvény szigorú monoton nő (1 pont)

$$\left.\begin{aligned} x+y &= x^2 \\ x &= 2y-2 \end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

A második egyenletből kifejezzük x-et, behelyettesítve az elsőbe kapjuk, hogy

$4y^2-11y+6=0$ (1 pont)

Ennek valós gyökei 2 és 0,75 (1 pont)

Az $y>1$ miatt 0,75 nem eleme az értelmezési tartománynak (1 pont)

Ezért csak $\boldsymbol{y=2}$ és így $\boldsymbol{x=2}$ lehetséges. A $(2;2)$ számpár megoldása az egyenletnek (1 pont)

Összesen: 14 pont

2) a) Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenséget?

$(x-1)^3-(x+1)^3>-8$ **(4 pont)**

b) Az alábbi f és g függvényt is a $[-3;6]$ intervallumon értelmezzük. $f(x)=\sqrt{x+3}$ és $g(x)=-0,5x+2,5$.

Ábrázolja közös koordináta-rendszerben az f és g függvényt a $[-3;6]$ intervallumon! Igazolja számítással, hogy a két grafikon metszéspontjának mindkét koordinátája egész szám! (4 pont)

c) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$0,5x+\sqrt{x+3}\le 2,5$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Elvégezve a köbre emelést: $(x^3-3x^2+3x-1)-(x^3+3x^2+3x+1)>-8$ (2 pont)

összevonva és rendezve: $x^2<1$ (1 pont)

a megoldáshalmaz tehát a $]\mathbf{-1;1}[$ intervallum (1 pont)

b) *Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 5. feladat*

c) A megoldandó egyenlőtlenség ekvivalens a $\sqrt{x+3}\le -0,5x+2,5$ egyenlőtlenséggel (1 pont)

A bal oldal nem negatív (1 pont)
a jobb oldal 5-nél nagyobb x-ekre negatív (1 pont)
Az egyenlőtlenség megoldásait a $[-3;6]$ intervallumon a b) részben ábrázolt f és g függvényekről leolvashatjuk (1 pont)
A megoldáshalmaz a $[\mathbf{-3;1}]$ intervallum (2 pont)

Összesen: 14 pont

3) Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x > 0, x \neq 1$ és $y > 0, y \neq 1$.

$$\left.\begin{aligned} \log_x y + \log_y x = 2 \\ \sin(2x+3y) + \sin(4x+y) = 1 \end{aligned}\right\}$$ **(13 pont)**

Megoldás:

Áttérve azonos alapú logaritmusra: $\log_x y + \dfrac{1}{\log_x y} = 2$ (2 pont)
Mivel egy pozitív számnak és a szám reciprokának összege pontosan akkor 2, ha a szám 1 (2 pont)
ezért $\log_x y = 1$ (1 pont)
azaz $x = y$ (1 pont)
Behelyettesítve a második egyenletbe: $2\sin 5 = 1$, azaz $\sin 5x = \dfrac{1}{2}$ (1 pont)
Innen $5x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ (1 pont)
vagy $5x = \dfrac{5\pi}{6} + 2l\pi$ (1 pont)
ahol $k \in \mathrm{N}$ és $l \in \mathbb{N}$ (1 pont)
A megoldások így: $\boldsymbol{x_1 = y_1 = \dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2}{5} \cdot k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{N})}$ (1 pont)
és $\boldsymbol{x_2 = y_2 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{5} \cdot l \cdot \pi \ \ (l \in \mathbb{N})}$ (1 pont)
A kapott értékek kielégítik az egyenletet (1 pont)

Összesen: 13 pont

4)

a) Ábrázolja a derékszögű koordinátarendszerben az $f:[0;5] \to \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ függvényt! (5 pont)

b) Tekintsük az $\left|(x-2)^2 - 1\right| = k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében! (7 pont)

c) Ábrázolja a megoldások számát megadó függvényt a $k \in]-6;6[$ intervallumon! (2 pont)

d) Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét! (2 pont)

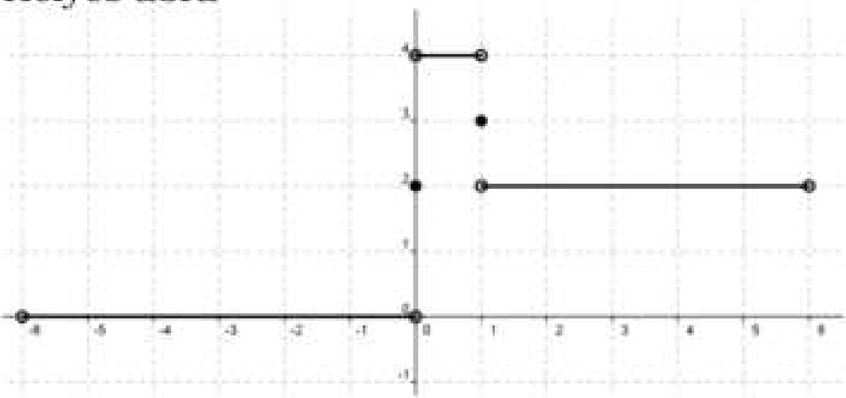
Megoldás:

a) *Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 6. feladat*

b) A megoldások számát az $f(x)$ teljes grafikonja és az $y = k$ egyenes közös pontjainak száma adja (2 pont)
Ha $k > 1$, akkor két közös pontja van (1 pont)

Ha $k = 1$, akkor három közös pontja van (1 pont)
Ha $0 < k < 1$, akkor négy közös pontja van (1 pont)
Ha $k = 0$, akkor két közös pontja van (1 pont)
Ha $k < 0$, akkor nincs közös pont (1 pont)

c) Helyes ábra



(2 pont)

d) Értékkészlete: $\boldsymbol{R_f = \{0;2;3;4\}}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

5) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned}\log_x\left(x^2y^3\right)+\log_y\left(x^3y\right)=9\\ \cos(x+y)+\cos(x-y)=0\end{aligned}\right\}$$

(16 pont)

Megoldás:

A logaritmus miatt x és y 1-től különböző pozitív számok lehetnek (1 pont)

Az első egyenlet bal oldalát alakítsuk át a logaritmus azonosságát használva:

$\log_x\left(x^2y^3\right)+\log\left(x^3y\right)=2+\log_x y+3\log_y x+1=3+3\left(\log_x y+\log_y x\right)$ (3 pont)

Így az első egyenlet: $\log_x y+\log_y x=2$ (1 pont)

A $\log_x y$ és a $\log_y x$ egymás reciprokai, és összegük 2 (2 pont)

Ez pontosan akkor teljesül, ha mindkettő 1-gyel egyenlő, amiből azt kapjuk, hogy $x=y$ (2 pont)

Beírva a második egyenletbe: $\cos 2x+\cos 0=0$, ahonnan $\cos 2x=-1$ (2 pont)

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $2x=\pi+2k\pi$,

azaz $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$ (3 pont)

Összevetve az $x,y>0$ feltétellel, $\boldsymbol{x=y=\frac{\pi}{2}+k\pi}$, $\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

6) a) Igazolja, hogy a $\left(-\frac{1}{2}\right)$, a 0 és a 3 is gyöke a $2x^3-5x^2-3x=0$ egyenletnek, és az egyenletnek ezeken kívül más valós gyöke nincs! **(5 pont)**

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$\boldsymbol{2\cos^3 x-5\cos^2 x-3\cos x=0}$ **(6 pont)**

c) Mutassa meg, hogy a $2\cdot 8^x+7\cdot 4^x+3\cdot 2^x=0$ egyenletnek nincs valós gyöke! **(5 pont)**

Megoldás:

a) $2x^3-5x^2-3x=x\left(2x^2-5x-3\right)=0$ (1 pont)

Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla! Az $\mathbf{x = 0}$ valóban gyök. (1 pont)

A többi gyököt a megmaradt másodfokú egyenletből kapjuk meg:

$2x^2 - 5x - 3 = 0$ (1 pont)

A két gyök: $-\frac{1}{2}$ **és 3**, azaz a megadott három szám valóban gyöke az eredeti egyenletnek. (1 pont)

Másodfokú egyenletnek legfeljebb két különböző valós gyöke lehet, ezért több gyök nincsen. (1 pont)

b) *Lásd: Trigonometria 9. feladat*

c) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos kifejezések 11. feladat*

Összesen: 16 pont

7) Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a rendezett valós számpárok halmazán!

a) $\left.\begin{array}{l} 2x = 12 - y \\ 2\sqrt{x} = y \end{array}\right\}$ **(7 pont)**

b) $\left.\begin{array}{l} \frac{x+2}{3} - \frac{y-3}{4} = 3 \\ \frac{3}{x+2} - \frac{1}{y-3} = 0 \end{array}\right\}$ **(7 pont)**

<u>Megoldás:</u>

a) $x \ge 0$ (és $y \ge 0$) esetén (1 pont)

A két egyenlet összeadásával: $2x + 2\sqrt{x} = 12$ (1 pont)

$\sqrt{x} = 6 - x$, amiből (négyzetre emelés és rendezés után) $x^2 - 13x + 36 = 0$ adódik. (1 pont)

Az egyenlet gyökei: 4 és 9. (1 pont)

A 9 nem megoldása a $\sqrt{x} = 6 - x$ egyenletnek. (1 pont)

Tehát $\mathbf{x = 4}$**, és így** $\mathbf{y = 4}$. (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

b) Értelmezési tartomány: $x \ne -2$ és $y \ne 3$. (1 pont)

Az első egyenletből $4x - 3y = 19$. (1 pont)

A második egyenletből: $x = 3y - 11$. (1 pont)

Behelyettesítve: $4(3y - 11) - 3y = 19$. (1 pont)

$\mathbf{y = 7}$ (1 pont)

$\mathbf{x = 10}$ (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

Összesen: 14 pont

8) Oldja meg a $[4;6]$ alaphalmazon az alábbi egyenleteket, illetve egyenlőtlenséget!

a) $|5 - |x|| = 3$ **(3 pont)**

b) $\sqrt{2x - 3} = \sqrt{x + 10} - 1$ **(6 pont)**

c) $2\cos^2 x + \cos x - 1 \le 0$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) $5-|x|=-3$ esetén $|x|=8$ (1 pont)

$5-|x|=3$ esetén $|x|=2$ (1 pont)

Ilyen elemei nincsenek az alaphalmaznak, ezért az eredeti egyenlet megoldáshalmaza az **üres halmaz**. (1 pont)

b) Négyzetre emelve: $2x-3=x+10+1-2\sqrt{x+10}$ (1 pont)

$2\sqrt{x+10}=14-x$ (1 pont)

Négyzetre emelve és rendezve: $x^2-32x+156=0$ (1 pont)

$x_1=6,\ x_2=26$ (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

26 hamis gyök, a helyes megoldás csak a **6** (1 pont)

c) A $2\cos^2 x+\cos x-1=0$ ($\cos x$-ben másodfokú) egyenlet teljesül, ha $\cos x=-1$ vagy $\cos x=0{,}5$. (2 pont)

(A megadott egyenlőtlenség $\cos x$-ben másodfokú tagjának együtthatója pozitív, ezért) $-1\le\cos x\le 0{,}5$. (1 pont)

$-1\le\cos x$ minden $x\in\mathbb{R}$ esetén (így az alaphalmaz minden elemére is) igaz. (1 pont)

$\left([4;6]\subset[\pi;2\pi]\text{ miatt}\right)$ a koszinuszfüggvény a $[4;6]$ alaphalmazon szigorúan monoton növekedő, (1 pont)

és itt $\cos x=0{,}5$, ha $x=\frac{5\pi}{3}(\approx 5{,}24)$ (1 pont)

ezért az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $\left[\mathbf{4};\frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{3}}\right]$ (1 pont)

Összesen 16 pont

9) a) Határozza meg $\frac{x}{y}$ értékét, ha $\frac{2x+3y}{4x+3y}=\frac{9}{10}$ $(y\ne 0,\ y\ne -2x)$. (3 pont)

b) Legyen $f(x)=x^2-11x+30$.

Igazolja, hogy ha $f(x)\ne 0$, akkor $\frac{f(x+1)}{f(x+1)}=\frac{x-4}{x-6}$. (5 pont)

c) Oldja meg az $\frac{x-4}{x-6}\le -1$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

(5 pont)

Megoldás:

a) $20x+30y=36x+27y$ (1 pont)

$3y=16x$ (1 pont)

Ebből $\frac{x}{y}=\frac{3}{16}$. (1 pont)

b) *Lásd: Bizonyítások 21. feladat*

c) Ekvivalens átalakításokkal oldjuk meg az egyenlőtlenséget.

Ha $x>6$, akkor $x-4\le 6-x$. (1 pont)

Ebből $x\le 5$, tehát a $]6;+\infty[$ halmazon nincs megoldása az egyenlőtlenségnek. (1 pont)

Ha $x<6$, akkor $x-4\ge 6-x$. (1 pont)

Ebből $x \geq 5$, tehát a $]-\infty;6[$ halmazon az **$[5;6[$ intervallum** minden eleme megoldása az egyenlőtlenségnek.

(Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát: $[5;6[$.) (2 pont)

Összesen: 13 pont

10) Az *ABCD* négyzet oldalai 4 méter hosszúak. A négyzetbe az ábrán látható módon az EFGH paralelogrammát írjuk. Az *AH* és *CF* szakasz hossza x méter, a *BE* és *DG* szakasz hossza 2x méter $(0 < x < 2)$.

a) Igazolja, hogy a beírt paralelogramma hossza (m^2-ben mérve): $T(x) = 4x^2 - 12x + 16$. (4 pont)

b) Határozza meg az x értékét úgy, hogy a beírt paralelogramma területe a lehető legkisebb legyen! (4 pont)

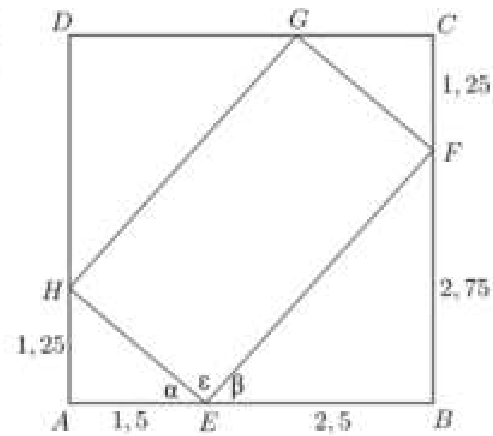
c) Számítsa ki a beírt paralelogramma szögeit, ha $x = 1{,}25$. (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Bizonyítások 24. feladat*

b) *Lásd: Függvények – Analízis 38. feladat*

c) Az ábra jelöléseit használjuk. Mivel $x = 1{,}25$, ezért $HA = 1{,}25$ és $AE = 4 - 2 \cdot 1{,}25 = 1{,}5$, $BE = 2{,}5$ és $BF = 4 - 1{,}25 = 2{,}75$.



A *HAE* derékszögű háromszögben $\text{tg}\alpha = \frac{1{,}25}{1{,}5} = \frac{5}{6} (\approx 0{,}833)$. (1 pont)

A *FBE* derékszögű háromszögben $\text{tg}\beta = \frac{2{,}75}{2{,}5} = 1{,}1$. (1 pont)

$\alpha \approx 39{,}8^\circ$ és $\beta \approx 47{,}7^\circ$. (1 pont)

$\alpha + \beta \approx 87{,}5^\circ$, ezért $\varepsilon \approx 92{,}5^\circ$. (1 pont)

A paralelogramma szemközti szögei egyenlők, szomszédos szögei pedig kiegészítő szögek, ezért a paralelogramma szögei: **$87{,}5^\circ$, $92{,}5^\circ$, $87{,}5^\circ$, $92{,}5^\circ$**. (1 pont)

Összesen: 14 pont

11) A *szókereső* mobiltelefonos játékban a megtalált szó hossza (vagyis a szót alkotó betűk száma) határozza meg a játékosoknak adott pontszámot. Egybetűs szóért nem jár pont, kétbetűs szóért 1 pont jár. Ha $n \geq 3$, akkor az *n* betűből álló szó megtalálásáért $\frac{n^2 - 5n + 10}{2}$ pontot kap a játékos.

a) Van-e olyan szó, amelyért 26 pontot kap a játékos? Válaszát indokolja! (3 pont)

b) Igazolja, hogy a játékszabály szerint a hosszabb szóért több pont jár, és hogy csak egész pontszámot kaphat a játékos! (6 pont)

c) Igazolja, hogy ha *m* tetszőleges természetes szám, akkor a játékos kaphat $2 + \frac{m(m+1)}{2}$ pontot! (A leírt játékszabály nem korlátozza a szavak hosszát, ezért feltehetjük, hogy tetszőleges hosszúságú ”szó” létezik.) (7 pont)

Megoldás:

a) Megoldandó az $\frac{n^2-5n+10}{2}=26$ egyenlet.

Nullára rendezve $n^2-5n-42=0$. (1 pont)

Ennek gyökei (kb. $9{,}45$ és $-4{,}45$) nem egészek. (1 pont)

Így **nincs olyan szó**, amelyért 26 pontot kap a játékos. (1 pont)

b) *Lásd: Bizonyítások 25. feladat*

c) *Lásd: Bizonyítások 25. feladat*

Összesen: 16 pont